Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten:

Transformationen, Exponentialverteilung, Normalverteilung

Teil 3

Erwartungswert und Transformationsformel

Für diskrete reellwertige Zufallsvariable hatten wir

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\,\rho(a)$$

Das hat sein Analogon im Fall reellwertiger ZV'er mit Dichten:

Den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ entspricht die Dichte $f(a)\,da$.

Und aus der Summe wird ein Integral:

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_l^r a\,f(a)\,da$$

Im Diskreten hatten wir für $h : S \to \mathbb{R}$

die Transformationsformel

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\, \rho(a).$$

Analog gilt im Fall mit Dichten:

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a)\, f(a)\, da$$

Der Erwartungswert einer standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x \, e^{-x} \, dx$$

Mit partieller Integration

$$\int u \, v' = uv - \int u'v$$

ergibt sich

$$\int_0^\infty x \, e^{-x} \, dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

Also:

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = 1.}$$

Der Erwartungswert des Quadrates einer standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_0^\infty x^2 \, e^{-x} \, dx$$

Wieder mit partieller Integration:

$$\int_0^\infty x^2 \, e^{-x} \, dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Also:

$$\boxed{\mathbf{E}\left[X^2\right] = 2.}$$

Der Erwartungswert einer Exp(α)-verteilten Zufallsvariablen Y:

Wir wissen schon: Ist Y Exp(α)-verteilt, dann ist αY Exp(1)-verteilt.

Also ist

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}[\alpha Y] = \frac{1}{\alpha} \cdot 1.$$

$$\boxed{\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\alpha}.}$$